**Metody optymalizacji procesów**

Programowanie nieliniowe na przykładzie optymalizacji założeń technicznych pierwszego stopnia rakiety Saturn V

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Kraków, 2019

Piotr Pasterak

Jakub Rak

1. Wstęp

Optymalizowanie wielu procesów daje się sprowadzić do rozwiązania problemu opisywanego w sposób liniowy, to znaczy takiego, że dla zadanych wartości zmiennych *xi* wartość oczekiwana *y* jest równa:

Również opis warunków brzegowych jest liniowy, a przestrzeń dostępnych wartości parametrów xi

jest wynikiem przecięcia wielu wielowymiarowych półprzestrzeni.

Istnieje wiele metod rozwiązań takiego problemu, jednak wszystkie one sprowadzają się do znalezienia punktu, który jest wierzchołkiem bryły będącej dziedziną funkcji y.

Jednak nie wszystkie problemy z którymi spotykamy się w rzeczywistości dają się opisać funkcją liniową. Wiele z nich, szczególnie te związane z inżynierią, są problemami nieliniowymi. Oznacza to, że funkcja opisująca problem jest funkcją złożoną z elementów innych niż suma iloczynów współczynników i zmiennych. W takim przypadku metody znane z rozwiązywania problemu liniowego zawodzą, gdyż szukane ekstremum funkcji może znajdować się w każdym miejscu dziedziny.

1. Przybliżenie problemu

Problem, który jest poruszony w niniejszej pracy dotyczy rozważań nad konstrukcją pierwszego członu rakiety nośnej Saturn V. Rakieta ta jest jednym z największych i najpotężniejszych obiektów kosmicznych wyprodukowanych w dziejach ludzkości. W 1969 roku wyniosła na orbitę i pozwoliła misji Apollo wylądować na księżycu oraz powrócić z niego.

Mimo tak odpowiedzialnego zadania, cały obiekt jest połączeniem zarówno prostoty jak i bezpieczeństwa. Jest to wynikiem braków technologicznych tamtych czasów, presji czasu związanej z wyścigiem o podbój kosmosu oraz niezwykłej współpracy tysięcy naukowców i inżynierów. Postawienie na prostotę skutkuje tym, że opis fizyczny pracy pierwszego stopnia rakiety daje się wyrazić za pomocą kilku zmiennych i kilkunastu stałych. Jednak prawdziwym zadaniem jest określenie, jak ma wyglądać optymalna praca tego podzespołu.

* 1. Założenia optymalizacyjne

W celu znalezienia rozwiązania idealnego, należy określić czym ono jest. Otóż to, z czym inżynierowie zmagali się w tamtych czasach oraz współcześnie jest masa rakiety jako całości. Im cięższe jest to, co chcemy wynieść na orbitę, tym więcej energii trzeba użyć. W przypadku rozważania pierwszego członu rakiety, mówimy tutaj o dwóch głównych aspektach:

* Paliwie, jako źródle energii,
* Obudowie i silnikach, które to paliwo spalają.

Masa całkowita pierwszego członu oraz paliwa wynosiła[1] 2290 ton, podczas gdy masa bez paliwa była równa 130 ton. Oznacza to, że masa paliwa wynosiła 2160 ton i stanowiło to ponad 94% masy całego pierwszego członu. Zmniejszając masę mieszanki paliwowej o kilka procent, zmniejsza się znacząco masę i wielkość całej rakiety. Tak więc w niniejszej pracy będzie poszukiwana najmniejsza ilość paliwa potrzebna do wyniesienia reszty rakiety na niską orbitę okołoziemską. Oznaczana będzie ona dużą literą V.

* 1. Zmienne niezależne

Aby zoptymalizować problem, należy określić, od jakich zmiennych zależy nasza funkcja celu. W tym przypadku wykorzystane będą dwie zmienne niezależne związane z geometrią układu:

* Promień dyszy silnika, oznaczany małą literą r,
* Promień zewnętrzny stopnia rakiety, oznaczany dużą literą R.
  1. Wyprowadzenie modelu (postaci funkcji celu)

Ze względu na ograniczony zakres niniejszej pracy przyjmiemy kilka uproszczeń, aby wyprowadzony model dało się wykorzystać w późniejszych obliczeniach.

1. Geometria części rakiety

W uproszczeniu pierwszy stopień rakiety jest walcem o wysokości H i promieniu R. Objętość tego walca jest objętością paliwa, które chcemy zabrać ze sobą i wynosi:

Dla znanych parametrów technicznych rakiety Saturn V wiemy że[1]: H = 42,1 m; R = 5,05 m, czyli:

Warto też policzyć gęstość paliwa, która jest niezależna od jego ilości (masa paliwa mp = 2’160’000 kg):

1. Cel misji

Celem misji pierwszego stopnia jest wyniesienie wszystkich pozostałych części rakiety na niską orbitę okołoziemską na wysokości­[2] Hk = 61'000 metrów oraz prędkość rakiety wynoszącą vk = 2350 m/s. Oznacza to, że użyta energia jest równa:

Gdzie:

m - masa rakiety, jest sumą masy połowy paliwa pierwszego stopnia, konstrukcji tego stopnia i masy pozostałych części rakiety z paliwem, czyli wynosi ona:

W tym przypadku masy wynoszą odpowiednio[1]: m­1 = 130000 kg, mr = 680000 kg.

Równanie sprowadza się więc do:

Które po wprowadzeniu stałych sprowadza się do równania:

Jeśli podstawi się objętość pierwszego członu rakiety Saturn V, otrzyma się:

1. Czas pracy silników

Rakieta Saturn V rozpędzała się za pomocą 5 silników F-1.

Zużycie paliwa jest wprost proporcjonalne do pola powierzchni silnika rakietowego:

Paliwo jest zużywane w sposób liniowy, a więc całkowity czas opróżnienia zbiorników wynosi:

Dla parametrów rzeczywistych[1, 3]: T0=168 s; r0 = 1,86 m:

Upraszczając:

1. Moc silnika

Silniki rakietowe F-1 posiadają siłę ciągu równą[3] F = 7,27·106 N każdy. Wiemy też, że zużywają one paliwo. Z II prawa dynamiki Newtona otrzymujemy zależność:

Moc silnika pochodzi z energii kinetycznej gazów wylotowych, czyli:

Wprowadzając znany wzór na szybkość zużycia paliwa, oraz fakt, że siła ciągu jest wprost proporcjonalna do powierzchni silnika:

Upraszczając:

Dla parametrów rzeczywistych rakiety Saturn V można wyznaczyć sumaryczną moc wszystkich silników na:

1. Moc siły oporu powietrza

Siła oporu powietrza jest dany wzorem:

Przechodząc do mocy oporu powietrza:

W przypadku rakiety współczynnik c jest zależny od prędkości (mowa o wartościach od zera do kilku prędkości dźwięku) i jest w zakresie[4]:

Dobrą, przybliżoną wartością współczynnika w zakresie prędkości rakiety jest: cd = 0,4.

Rozpatrywana prędkość będzie się zmieniać, ale można przyjąć dla obliczeń, że wynosi ona połowę prędkości końcowej vk (na początku prędkość będzie wynosiła 0).  
W tym miejscu warto też zaznaczyć, że ciśnienie powietrza (a więc i siła oporu przy stałych warunkach) będzie się zmniejszać z rosnącą wysokością, osiągając na wysokości docelowej wartość mniejszą niż 0,001 wartości na poziomie morza[5]. W niniejszej pracy przyjęto średnią wartość ciśnienia na poziomie 1/10 (wysokość 12 km) wartości początkowej.  
Podsumowując, wzór na moc oporu powietrza będzie wyglądał następująco:

1. Moc stratna

Ze względu na wcześniejsze obliczenie energii potrzebnej na wzniesienie rakiety oraz znajomość czasu przelotu (168 s), można obliczyć średnią użytą moc przez rakietę Saturn V:

Suma mocy potrzebnej na wzniesienie rakiety oraz potrzebnej na pokonanie oporów powietrza jest mniejsza od mocy dostępnej na silnikach rakiety Saturn V.

Wynika ona z geometrii rakiety oraz wymogów dotyczących korekcji lotu. Wysoko zawieszony środek ciężkości oraz silniki umieszczone na dole pojazdu powodują, że sterowanie pojazdem wymaga dodatkowych nakładów energetycznych. Są one wprost proporcjonalne do stosunku wysokości środka ciężkości do szerokości rakiety:

Współczynnik α5 można wyznaczyć ze znanych parametrów technicznych rakiety:

Lub w sposób uproszczony:

Sumarycznie, moc użyteczna będzie dana wzorem:

1. Czas lotu, równanie końcowe

Znając wartość mocy użytecznej, można wyznaczyć czas potrzebny na uzyskanie energii końcowej lotu:

Z drugiej strony czas pracy silników dany był wzorem:

Przyrównując te czasy do siebie, otrzymujemy:

Rozwiązanie równania ze względu na V to funkcja celu:

Co można uprościć do:

1. Warunki brzegowe

Przedział wartości R i r, ze względu na warunki techniczne powinny wynosić:

W przypadku promienia r możemy mówić o rozbiciu pola powierzchni silnika rakietowego na kilka mniejszych o sumarycznym polu powierzchni, dlatego też promień r może być aż tak duży.

Ostatecznie trzeba też dodać warunek ograniczający promienie między sobą:

1. Obliczenia
2. Bibliografia
3. <https://www.quora.com/What-was-the-weight-of-the-Saturn-V-without-any-fuel-being-loaded>
4. <https://history.nasa.gov/afj//ap08fj/pdf/sa503-flightmanual.pdf>
5. <https://en.wikipedia.org/wiki/Rocketdyne_F-1>
6. <https://space.stackexchange.com/questions/32265/understanding-coefficient-of-drag-verses-mach-number-for-launch-vehicles>
7. <http://ww2010.atmos.uiuc.edu/(Gh)/guides/mtr/prs/hght.rxml>